УДК 531.749.1
DOI: 10.30987/conferencearticle_5c19e60675f564.28052252

Д.Г. Миловзоров, В.Х. Ясовеев
(г. Уфа, Уфимский государственный авиационный технический университет)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ МАГНИТОМЕТРОВ

Приводятся базовые положения теории пространственной ориентации твердых тел применительно к задачам определения азимута, разрабатываются базовые математические модели магнитометров с трехкомпонентными датчиками с использованием метода кватернионов.

The basic principles of the spatial orientation theory of solids are given for the problems of determining azimuth, basic mathematical models of magnetometers with three-component sensors are developed using the quaternion method.

Ключевые слова: трехкомпонентный магнитометр, метод матриц, метод кватернионов.

Keywords: three-component magnetometer, matrix method, quaternion method.

Для определения пространственного положения твердого тела и его элементов (в частности, трех жестко закрепленных в корпусе датчиков магнитного поля F_X, F_Y и F_Z) необходимо рассмотреть базисы и их преобразования при движении по криволинейной траектории с учетом эволюций в виде отдельных плоских поворотов.

Исходным положением корпуса магнитометра является его вертикальная ориентация (рис. 1) в начальной точке траектории движения (например, в устье скважины), а за базовые направления принимаются два неколлинеарных вектора: $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения и $\vec{T}$ – вектор напряженности геомагнитного поля. При этом основной базис $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$, представляющий собой правую систему координат, является неподвижным, связанным с Землей так, что ось $0Z_0$ ориентирована вертикально и совпадает с направлением вектора $\vec{g}$, а ось $0X_0$ ориентирована горизонтально и совпадает с направлением вектора $\vec{H}$ – горизонтальной составляющей полного вектора $\vec{T}$.

Решение задачи определения параметров пространственной ориентации можно выполнить с помощью теории кватернионов [1]. Под кватернионом понимают число в четырехмерном гиперкомплексном пространстве, состоящее из одной действительной и трех мнимых единиц с действительными элементами λ_k (k = 0, 1, 2, 3):

$$\Lambda = \left(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot i_1 + \lambda_2 \cdot i_2 + \lambda_3 \cdot i_3 .$$

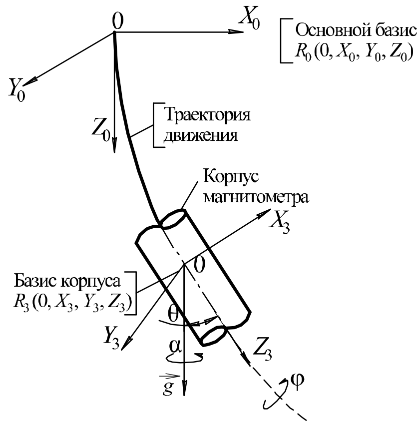

Рис. 1. Преобразование основного базиса $R_0(0, X_0, Y_0, Z_0)$ в базис $R_3(0, X_3, Y_3, Z_3)$

Алгебра кватернионов позволяет представить конечный поворот (преобразование) в пространстве в простой и удобной форме [2].

Первый поворот осуществляется на азимутальный угол α вокруг оси $0Z_0$ (рис. 2), второй – на зенитный угол θ вокруг оси $0Y_1$, и третий – на визирный угол φ вокруг оси $0Z_2$ [3].

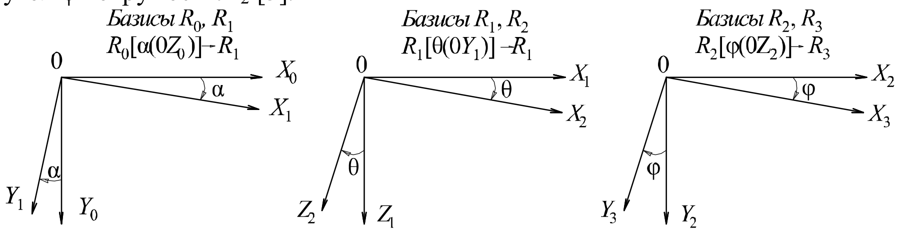

Рис. 2. Последовательные повороты базиса $R_0(0, X_0, Y_0, Z_0)$

Результирующий кватернион, соответствующий поворотам (рис. 2), будет иметь вид:

$$\Lambda_P = \Lambda_{\alpha\,(Z)} \circ \Lambda_{\theta\,(Y)} \circ \Lambda_{\varphi\,(Z)}, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\alpha(Z)} &= \mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2} + i_3\ \mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2} \\ \Lambda_{\theta(Y)} &= \mathrm{Cos}\frac{\theta}{2} + i_2\ \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2} \\ \Lambda_{\varphi(Z)} &= \mathrm{Cos}\frac{\varphi}{2} + i_3\ \mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right\}$$

элементарные кватернионы трех последовательных поворотов основного базиса R_0 на углы α, θ и φ.

Принимая во внимание изоформизм ортогонального преобразования [1]

$$r' = \Lambda \circ r \circ \Lambda^{-1}$$

для нормированных кватернионов, т.е. $\|\Lambda\| = \Lambda^2 = 1$, получим систему уравнений проекций в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} r'_1 &= \left(\lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\cdot r_1 + 2\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3\right)\cdot r_2 + 2\left(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2\right)\cdot r_3 \\ r'_2 &= 2\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3\right)\cdot r_1 + \left(\lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\cdot r_2 + 2\left(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1\right)\cdot r_3 \\ r'_3 &= 2\left(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2\right)\cdot r_1 + 2\left(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1\right)\cdot r_2 + \left(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\cdot r_3 \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

При математическом моделировании информационно-измерительных систем для трехкомпонентных магнитометрических преобразователей азимута под r_1', r_2', r_3' подразумеваются T_{X3}, T_{Y3} и T_{Z3} соответственно, а под r_1, r_2, r_3 – $T\text{Cos}\vartheta$, 0, $T\text{Sin}\vartheta$, то есть $[r_1', r_2', r_3'] = [T_{X3}, T_{Y3}, T_{Z3}]$ и $[r_1, r_2, r_3] = [T\text{Cos}\vartheta, 0, T\text{Sin}\vartheta]$, где T_{X3}, T_{Y3} и T_{Z3} – сигналы с магнитометров, ориентированных по осям $0X$, $0Y$ и $0Z$, а ϑ – угол магнитного наклонения.

С учетом этого система уравнений (2) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} T_{X3} &= \left[\left(\lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\text{Cos}\,\vartheta + 2\left(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2\right)\text{Sin}\,\vartheta\right] T \\ T_{Y3} &= \left[2\left(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3\right)\text{Cos}\,\vartheta + 2\left(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1\right)\text{Sin}\,\vartheta\right] T \\ T_{Z3} &= \left[2\left(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2\right)\text{Cos}\,\vartheta + \left(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\text{Sin}\,\vartheta\right] T \end{aligned}\right\},$$

где λ_i – есть компоненты результирующего кватерниона, определяемого произведением обратных кватернионов, соответствующих отдельным плоским поворотам, взятом в обратном порядке. Так, при первом повороте

$$\vec{T}_{R1} = A_{\alpha(Z)}\cdot\vec{T}_{R0},$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} T_{X1} &= \text{Cos}\,\vartheta\ \text{Cos}\,\alpha\cdot T \\ T_{Y1} &= -\text{Cos}\,\vartheta\ \text{Sin}\,\alpha\cdot T \\ T_{X1} &= \text{Sin}\,\vartheta\cdot T \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Тогда систему уравнений (2) можно представить в следующем виде:

$$T_{iR_0} = \sum_{j=1}^{3} C_{ij}\, T_{jR_3},$$

где T_{jR3} – измеряемые проекции в базисе $R_3(0, X_3, Y_3, Z_3)$, C_{ij} – элементы при r_i. Результирующий кватернион Λ_p для данного случая определится следующим образом:

$$\Lambda_P = \prod_{i=1}^{n}\Lambda^{-1}_{\delta i(k)} = \Lambda^{-1}{}_{\varphi\,(Z)}\circ\Lambda^{-1}{}_{\theta\,(Y)} = (\text{Cos}\frac{\varphi}{2} - i_3\text{Sin}\frac{\varphi}{2})\circ(\text{Cos}\frac{\theta}{2} - i_2\text{Sin}\frac{\theta}{2}). \quad (4)$$

Причем компоненты C_{ij} в системе уравнений (2) выражаются через компоненты λ_i кватерниона Λ_p:

$$\lambda_0 = \mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{(\varphi+\alpha)}{2};\quad \lambda_1 = \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{(\varphi-\alpha)}{2};$$

$$\lambda_2 = \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{(\varphi-\alpha)}{2};\quad \lambda_3 = \mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{(\varphi+\alpha)}{2}.$$

Решением системы (2) с учетом компонент λ_i относительно искомого угла α (при измеренных $T_{i(i=X3,\ Y3,\ Z3)}$ и известных априори θ и φ) является базовая модель трехкомпонентного магнитометра [4,5]:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{-(T_{X3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + T_{Y3}\,\mathrm{Cos}\,\varphi)}{\left(T_{X3}\,\mathrm{Cos}\,\varphi - T_{Y3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi\right)\mathrm{Cos}\,\theta + T_{Z3}\,\mathrm{Sin}\,\theta}\ . \qquad (5)$$

При анализе (5) следует принимать во внимание, что данная базовая статическая математическая модель адекватна лишь в идеальном случае, когда оси чувствительности магнитометров $F_{i(i=X,\ Y,\ Z)}$ полностью совпадают с ортонормированным репером $R_3(0,\ X_3,\ Y_3,\ Z_3)$. На практике же, особенно в условиях технологического разброса параметров промышленного производства, добиться данного идеального случая чрезвычайно сложно, а порою и просто невозможно.

В этой ситуации возможно два варианта решения. Первый – скрупулезное проведение комплекса трудоемких технологических регулировочных операций при изготовлении подобных информационно-измерительных систем, требующих высокой квалификации персонала. Второй – это экспериментальное определение числовых значений малых углов отклонения осей чувствительности магнитометрических преобразователей от осей базиса R_3 корпуса прибора и их последующий учет в виде констант при алгоритмической обработке результатов измерений.

Список литературы

1. *Бранец, В.Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский М.: Наука, 1986.–320 с.

2. *Ривкин, С.С.* Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании. – М.: Наука, 1978. –320 с.

3. Векторно-матричный аппарат в моделировании трехкомпонентных инклинометрических систем. / Д. Г. Миловзоров, Л. Р. Зигангиров, Г. В. Миловзоров //Датчики и системы. – 2011. – №7. – С. 30-35.

4. *Milovzorov, D.G.* Mathematical modeling of the determining azimuth process for inclinometric systems for small incline angles. / D. G. Milovzorov, V. Kh. Yasoveev //2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM 2016). Издательство Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2016. – С. 1391-1395.

5. *Milovzorov, D.G.* Mathematical modeling of fluxgate magnetic gradiometers. / D. G. Milovzorov, V. Kh. Yasoveev // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2017. –Т. 53. – № 4. –С. 388-394.

Материал поступил в редколлегию 12.10.18.