

В.И. Семенов, А.К. Шурбин

(г. Чебоксары, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова)

КОНСТРУИРОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

CONSTRUCTION OF WAVELETS WITH A RECTANGULAR AMPLITUDE-FREQUENCY RESPONSE

В научной литературе отмечается, что цифровые фильтры с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой физически не реализуемы. В работе на примере вейвлетов показано, что такие фильтры можно синтезировать.

In the scientific literature, it is noted that digital filters with a rectangular frequency response are not physically realizable. In the work, using the example of wavelets, it is shown that such filters can be synthesized.

Ключевые слова: непрерывное вейвлет-преобразование, прямоугольная амплитудно-частотная характеристика, симметричный ортогональный вейвлет, цифровой фильтр.

Keywords: continuous wavelet transform, rectangular amplitude-frequency response, symmetric orthogonal wavelet, digital filter.

Для того, чтобы при реконструкции сигнала не было искажений, необходимо иметь ортогональные симметричные и антисимметричные вейвлеты. В литературе отмечается, что таких вейвлетов не существует. При синтезе цифровых фильтров также желательно иметь симметричные и антисимметричные импульсные характеристики, обеспечивающие одинаковую временную задержку для всех частот сигнала. Такие фильтры имеют импульсную характеристику конечной длины (КИХ-фильтры). Применение таких фильтров приводит для прямоугольных амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) к пульсациям слева и справа от частоты среза и появлению переходной полосы (явление Гиббса). Объясняется это усечением ряда Фурье. Чем короче ряд, тем в большей степени происходит отклонение частотной характеристики от первоначальной на крутых перепадах. Объясняют явление Гиббса еще используя свойство свертки. Произведение функции с бесконечно длинной импульсной характеристикой на функцию окна конечной длины в частотной области соответствует свертке их Фурье-образов. Для прямоугольного окна Фурье-образом является sinc-функция, которая имеет более широкий центральный пик для более коротких окон. Если Фурье-образом импульсной характеристики является передаточная функция (частотная характеристика) с прямоугольной АЧХ, то ее свертка с sinc-функцией порождает явление Гиббса. Для уменьшения пульсаций применяются различные виды окон (весовые функции). В литературе по

цифровым фильтром на основе критерия Пэли - Винера (Пели - Виннера) доказываемся, что фильтры с прямоугольной АЧХ физически нереализуемы. Так как вейвлеты являются импульсными характеристиками при разложении (декомпозиции) и реконструкции (восстановлении) сигнала, то на основе критерия Пэли-Винера нельзя получить вейвлеты с прямоугольной АЧХ.

Насколько цифровой фильтр (вейвлет) подходит для практического применения, можно проверить, декомпозируя сигнал прямым и реконструируя обратным вейвлет-преобразованием (ВП). Если реконструированный сигнал точно совпадает с оригинальным сигналом, то вейвлет подходит и он ортогональный. В теории обобщенного преобразования Фурье доказываемся, что вейвлеты ортогональны, если скалярное произведение этих вейвлетов равно нулю. Исследования показывают, что чем меньше наложение спектров вейвлетов для разных масштабных коэффициентов, тем меньше скалярное произведение этих вейвлетов. Не будет наложения, когда спектры имеют прямоугольную форму.

Основным признаком вейвлетов являются нулевое среднее. Нулевое среднее означает, что график функции должен осциллировать (быть знакопеременным) вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Часто для приложений необходимо, чтобы все первые n моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0.$$

Для получения вейвлетов n -го порядка были проведены исследования и в ходе исследования были сконструированы ортогональные симметричные и антисимметричные вейвлеты с прямоугольной АЧХ. На рис. 1 представлена пятая часть ортогонального симметричного вейвлета.

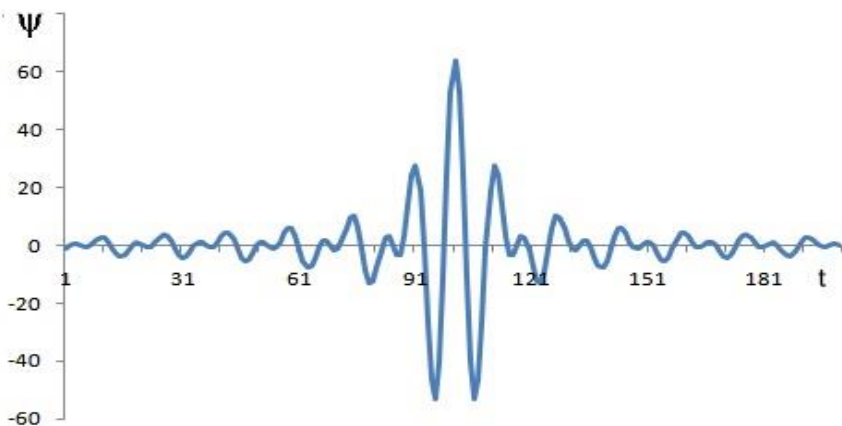


Рис. 1. Ортогональный симметричный вейвлет

Вейвлеты n -го порядка позволяют анализировать более тонкую (высокочастотную) структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие. Такие вейвлеты позволяют концентрировать энергию в немногих значимых коэффициентах. Концентрация энергии в немногих значимых коэффициентах называется локализацией энергии, она является основной предпосылкой для сжатия данных. Концентрирующий механизм работает более эффективно с увеличением n . На рис. 2 представлена АЧХ этого вейвлета в децибелах. Видно, что в полосе задержания ослабление около -300 дБ, что сравнимо с погрешностью вычисления. Например, при скалярном произведении синусоид с разными частотами с числом отсчетов, как у данного вейвлета, вычисленное значение больше -300 дБ. Вместе тем, скалярное произведение должно быть равно нулю, так синусы и косинусы образуют ортогональный базис.

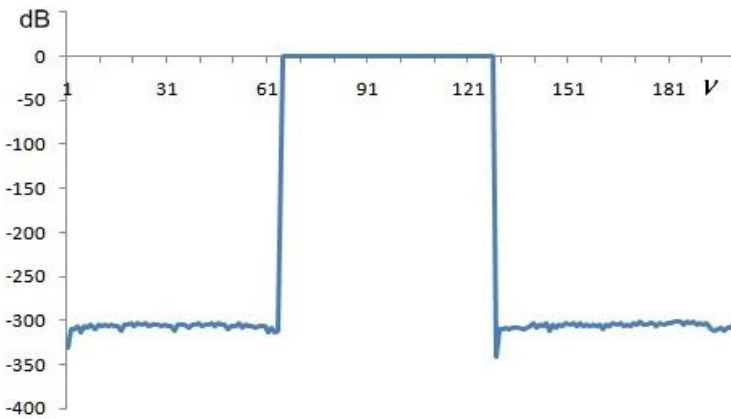


Рис. 2. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета

Скалярное произведение данных вейвлетов равно нулю в пределах погрешности. Такое наблюдается для всех скалярных произведений вейвлетов с другими масштабными коэффициентами. Только скалярные произведения вейвлетов с одинаковыми масштабными коэффициентами не равны нулю. Вид АЧХ симметричных и антисимметричных вейвлетов не зависит от размера (длины) вейвлета. Можно сказать, что вейвлеты имеют идеальную АЧХ в пределах погрешности вычисления.

Если в критерии Пэли - Винера модуль

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|Ln|K(i\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

частотной передаточной функции не равен нулю, но меньше погрешности вычисления, то интеграл не расходится. В связи с этим, можно сказать, что сконструированные вейвлеты не противоречат критерию Пели – Винера. А

явление Гиббса не наблюдается. Объяснить это можно, если представить вейвлет конечной длины произведением вейвлета конечной длины на окно бесконечной длины. Тогда в частотной области будет свертка Фурье-образа вейвлета с дельта-функцией. Если Фурье-образом вейвлета является передаточная функция с прямоугольной АЧХ, то ее свертка с дельта-функцией не порождает явление Гиббса.

Сконструированные вейвлеты применялись для декомпозиции и реконструкции сигналов. Для количественного сравнения использовалась мера типа корреляции между реконструированным сигналом и оригинальным сигналом. Вычисленное значение коэффициента корреляции Пирсона сигнала и реконструированного сигнала равнялось 0,99999.

Для увеличения быстродействия разработаны алгоритмы непрерывного быстрого ВП с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ), т.е. ВП производится в частотной области [1 - 4]. Разработанные алгоритмы позволили уменьшить время вычисления ВП на четыре порядка по сравнению с прямым численным интегрированием для вейвлетов на основе производных функции Гаусса при большой выборке. Вейвлеты с прямоугольной АЧХ позволили уменьшить время вычисления прямого ВП в частотной области в 2 раза по сравнению, когда использовались вейвлеты на основе производных функции Гаусса. Также такие вейвлеты позволили уменьшить время вычисления обратного ВП сигнала с размером выборки 32768 и 262144 отсчетов в 260 и 5000 раз соответственно по сравнению с алгоритмом с использованием БПФ. Конструирование симметричных и антисимметричных вейвлетов с прямоугольной АЧХ позволило обратное ВП вычислять во много раз быстрее, чем с использованием БПФ. Профилировка проводилась для процессора Celeron® с частотой 2,54 ГГц, ОЗУ 1 Гб.

Список литературы

1. Семенов, В.И. Фильтрация изображений, полученных с помощью оптического микроскопа, с применением кратномасштабного анализа. / В.И. Семенов, К.Г. Михеев, А.К. Шурбин, Г.М. Михеев // Химическая физика и мезоскопия. – Ижевск, 2014. – Т. 16. – №3. – С. 399-404.
2. Семенов, В.И. Конструирование ортогональных вейвлетов в частотной области для кратномасштабного анализа сигналов/ В.И. Семенов, А.К. Шурбин, К.Г. Михеев, Г.М. Михеев // Химическая физика и мезоскопия – Ижевск, 2018. – Т. 20. – №2. – С. 230-238.
3. Семенов, В.И. Конструирование вейвлетов в частотной области/ В.И. Семенов, С.И. Чучкалов, О.В. Христофоров // Journal of Advanced Research in Technical Science. – North Charleston, USA: SRC MS, CreateSpace. – 2017. Issue 7-2. – P. 26-29
4. Semenov V.I., Khristoforov O.V., Chuchkalov S.I. Calculating the standard deviation of the size of objects in an image. Journal of Advanced Research in Technical Science. – North Charleston, USA: SRC MS, CreateSpace. – 2017. – 62-64 p.

Материал поступил в редколлегию 12.10.20.