УДК 531.749.1
DOI: 10.30987/conferencearticle_5c19e6057e8241.73780926

Д.Г. Миловзоров, А.В. Буторин, Г.В. Челюмов
(г. Уфа, Уфимский государственный авиационный технический университет)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОНАВИГАЦИОННЫХ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ТРЕХКОМПОНЕНТНЫМИ АКСЕЛЕРОМЕТРИЧЕСКИМИ ДАТЧИКАМИ

Приводятся базовые положения теории пространственной ориентации твердых тел применительно к задачам геонавигации, разрабатываются основные математические модели геонавигационных информационно-измерительных систем с трехкомпонентными акселерометрическими датчиками с использованием методов матриц и кватернионов.

The basic concepts of the spatial orientation theory applicable to geo-navigation problems are presented, basic mathematical models of geo-navigation information-measuring systems with three-component accelerometric sensors are developed using the methods of matrices and quaternions.

Ключевые слова: геонавигационная информационно-измерительная система, трехкомпонентный акселерометрический преобразователь, метод матриц, метод кватернионов.

Keywords: geo-navigation information-measuring system, three-component accelerometer transducer, matrix method, quaternion method.

Теория ориентации твердых тел имеет давнюю историю и по мере своего развития как наука достигла определенного уровня в решении задач пространственного позиционирования объектов относительно базовой (основной) трехмерной прямоугольной правой системы координат $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$, связанной с двумя неколлинеарными векторами $\vec{m}$ – полным вектором индукции геомагнитного поля и $\vec{g}$ – вектором ускорения свободного падения (рис. 1).

При горизонтальном исходном положении корпуса геонавигационной системы (ГНС) его продольная ось $0X_k$, как правило, лежит в горизонтальной плоскости $0X_0Y_0$ (рис. 1), а ось $0Z_k$ совпадает с осью $0Z_0$ базовой системы координат $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$.

В современных ГНС в качестве векторно-измерительных преобразователей (ВИП) используют трехкомпонентные акселерометрические преобразователи (ТАП), чувствительные к гравитационному полю Земли.

Задачи математического моделирования ТАП представляют собой классические задачи теории пространственной ориентации твердых тел. В моделировании ТАП используют известные математические методы аналитической геометрии, сферической тригонометрии и др. [1], среди которых, в качестве предпочтительных, следует выделить матричный метод и метод кватернионов [2].

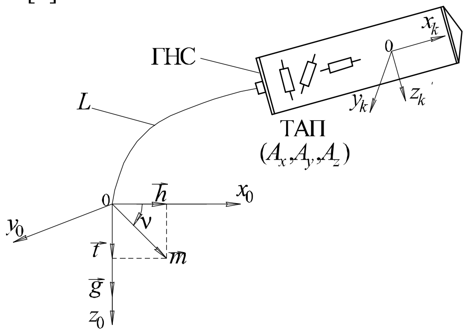

Рис. 1. Базовая система координат $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$ и базис корпуса ГНС $R_k(0,X_k,Y_k,Z_k)$ при его горизонтальном начальном положении

Сам процесс математического моделирования ТАП включает несколько этапов:

– разбиение сложных пространственных положений подвижных объектов на последовательность отдельных плоских поворотов основного базиса $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$ вокруг своих осей;
– формирование векторно-матричных уравнений, устанавливающих связь измеряемых проекций вектора $\vec{g}$ с его проекциями в основном базисе $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$ или формирование результирующих кватернионов;
– решение векторно-матричных уравнений или определение компонент результирующего кватерниона с последующим получением системы трех скалярных уравнений связи измеряемых проекций вектора $\vec{g}$ с искомыми углами пространственной ориентации;
– решение систем скалярных уравнений и получение математических моделей ТАП в виде аналитических зависимостей искомых углов от измеряемых проекций вектора $\vec{g}$.

Такая последовательность этапов позволяет получать и анализировать лишь базовые математические модели без учета влияния внешних дестабилизирующих факторов – температуры, вибраций, ударов и т.д. Кроме того, при моделировании также последовательно принимают ряд допущений:

– акселерометрические датчики обладают линейными статическими характеристиками «выход-вход»;
– акселерометрические датчики имеют одинаковую крутизну статических характеристик и нормированные масштабирующие коэффициенты;
– оси чувствительности акселерометрических датчиков взаимно ортогональны и совпадают с соответствующими осями базиса корпуса $R_k(0,X_k,Y_k,Z_k)$.

При движении по криволинейной траектории L геонавигационная система (рис. 1) совершает сложные пространственные эволюции, которые в каждой точке траектории L можно представить в виде совокупности отдельных плоских поворотов, что соответствует ортогональным преобразованиям основного базиса $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$ во вновь образуемый базис $R_k(0,X_k,Y_k,Z_k)$, связанный с самим перемещающимся объектом [3]. Первый поворот осуществляется вокруг оси $0Y_0$ на угол тангажа β, отсчитываемый в вертикальной плоскости между касательной к траектории и вектором ускорения свободного падения. Второй поворот осуществляется вокруг оси $0X_0$ на угол крена ψ – угол поворота объекта вокруг собственной продольной оси, отсчитываемой в плоскости, перпендикулярной траектории движения.

В соответствии с матричным методом теории пространственной ориентации твердых тел в общем виде векторно-матричное уравнение (ВМУ) имеет следующий вид [4]:

$$\vec{W}_{Rk} = \left[A_{\sum}\right]\vec{W}_{R0} = \left[\Pi_{i=1}^{n}\{A_{\delta i(j)}\}\right]\vec{W}_{R0}, \qquad (1)$$

где $\vec{W}_{R0}(w_{x0}, w_{y0}, w_{z0})$ – вектор в основном базисе $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$;

$\vec{W}_{Rk}(w_{xk}, w_{yk}, w_{zk})$ – вектор в образуемом базисе $R_k(0,X_k,Y_k,Z_k)$;

$A_{\sum} = \Pi_{i=1}^{n}\{A_{\delta i(j)}\}$ – результирующая матрица, определяемая произведением соответствующих матриц направляющих косинусов $A_{\delta i(j)}$ отдельных поворотов базиса $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$ на углы δ_i вокруг j-осей.

Применительно к ГНС (рис. 1) ВМУ для ТАП будет иметь вид:

$$\vec{g}_{Rk} = \Pi_{i=1}^{2}\left\{A_{\delta i(j)}\right\}\vec{g}_{R0} = A_{\psi(x)}A_{\beta(y)}\begin{Vmatrix}0\\0\\g\end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

где $A_{\psi(x)}$ и $A_{\beta(y)}$ – матрицы направляющих косинусов поворотов базиса $R_0(0,X_0,Y_0,Z_0)$ вокруг оси $0X$ на угол крена ψ и вокруг оси $0Y$ на угол тангажа β соответственно.

Решение представленной задачи пространственной ориентации можно выполнить также и с помощью теории кватернионов [2]. Результирующий кватернион в этом случае будет иметь вид:

$$\Lambda_p = \Lambda_{\beta(y)} \circ \Lambda_{\psi(x)} = \left(\cos\frac{\beta}{2} + i_2 \sin\frac{\beta}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\psi}{2} + i_1 \sin\frac{\psi}{2}\right). \qquad (3)$$

Система уравнений для проекций выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
r'_1 &= \left[(\lambda_0)^2 + (\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2 - (\lambda_3)^2\right]r_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)r_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)r_3\\
r'_2 &= 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)r_1 + \left[(\lambda_0)^2 - (\lambda_3)^2 - (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2\right]r_2 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)r_3\\
r'_3 &= 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)r_1 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)r_2 + [(\lambda_0)^2 + (\lambda_3)^2 - (\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2]r_3
\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

С учетом (3) система уравнений (4) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 2\left(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2\right)g \\ g_y &= 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)g \\ g_z &= [\left(\lambda_0\right)^2 + \left(\lambda_3\right)^2 - \left(\lambda_1\right)^2 - \left(\lambda_2\right)^2]g \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

где λ_i – элементы результирующего кватерниона Λ_p:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\psi}{2};\ \lambda_1 = \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\lambda_2 = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\psi}{2};\ \lambda_3 = -\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\psi}{2}. \qquad (6)$$

Решением ВМУ (2) и решением системы уравнений (5) являются система скалярных уравнений и базовые математические модели ТАП в ГНС:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= -\sin\beta \\ g_y &= \sin\psi\cos\beta \\ g_z &= \cos\psi\cos\beta \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arctg}\frac{g_y}{g_z} \\ \beta &= \operatorname{arctg}\frac{-g_x}{\sqrt{[g_y]^2 + [g_z]^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Полученные ВМУ, системы уравнений и выражения (2)–(7) представляют собой базовые (основные) уравнения и математические модели ТАП в ГНС (рис. 1).

Таким образом, в данной статье с применением классических методов теории пространственной ориентации твердых тел представлена в рамках принятых допущений совокупность базовых математических моделей трехкомпонентных векторно-измерительных преобразователей с акселерометрическими датчиками, входящими в состав геонавигационных систем. Данные модели представляют собой основу для последующей разработки и анализа обобщенных математических моделей информационно-измерительных систем контроля параметров пространственной ориентации, а также для разработки и проведения комплексных исследований погрешностей определения искомых параметров по измеряемым сигналам.

Список литературы

1. *Ишлинский, А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.

2. *Бранец, В. Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1986. – 320 с.

3. *Milovzorov, D.G.* Concept of Information Signals Reforming for the Tilt Measurement Systems with a Triaxial Accelerometer / D. G. Milovzorov, V. Kh. Yasoveyev // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2017. – С. 1-5.

4. *Milovzorov, D.G.* Mathematical models of inclination parameter converters based on double-axis accelerometers. / D. G. Milovzorov, V. Kh. Yasoveyev // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2017. –Т. 53. – № 1. – С. 9-14.

Материал поступил в редколлегию 12.10.18.