

Лекция 4

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

План

1. Введение
2. Численное решение уравнений нелинейных резистивных цепей
3. Дискретные схемы замещения нелинейных резистивных цепей
4. Выводы

1. Введение

Одна из важнейших задач анализа нелинейных цепей заключается в определении рабочих точек или точек смещения электронных приборов. *Рабочей точкой* нелинейного элемента называют значения постоянных напряжения и тока, изображаемых в виде точки на его вольт-амперной характеристике.

Рабочую точку определяют при действии постоянных источников напряжения и тока. При этом индуктивные элементы заменяют короткими замыканиями, а емкостные – разрывом.

Простейшим является графический метод определения рабочей точки. В соответствии с этим методом рабочая точка находится на пересечении ВАХ нелинейной подсхемы и нагрузочной прямой линейной цепи.

Рассмотрим графический метод определения рабочей точки. Выделим в анализируемой цепи две подсхемы: линейную N_a и нелинейную N_b (рис. 4.1).

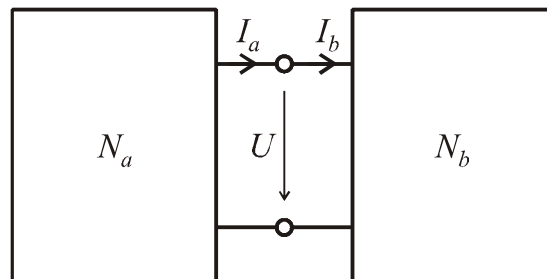


Рис. 4.1

Для выбранных направлений напряжений и токов справедливы равенства:

$$I_a = I_b = I; \quad U_a = U_b = U. \quad (4.1)$$

Представим линейную часть цепи эквивалентной схемой Тевенина (рис. 4.2).

ВАХ линейной подсхемы представляет прямую, проходящую через точки на осях напряжений и токов, соответствующие режимам холостого хода и короткого замыкания (рис. 4.3). Ее называют *нагрузочной прямой*.

В соответствии с равенствами (4.1) рабочая точка находится на пересечении ВАХ нелинейной подсхемы N_b и нагрузочной прямой (точка a на рис. 4.3).

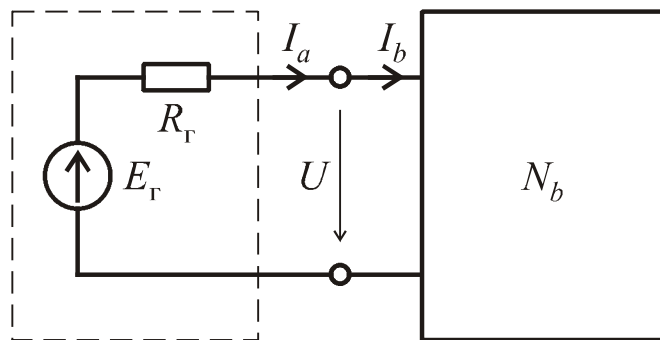


Рис. 4.2

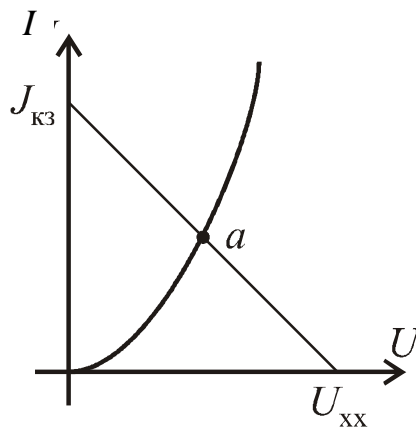


Рис. 4.3

Графический метод определения рабочей точки является приближенным и применяется на практике только для цепей простой конфигурации. Его достоинствами являются простота и наглядность. Графический метод можно использовать для определения начального приближения, а затем для получения точного решения применить численный метод.

Пример 4.1. Рассмотрим пример определения рабочей точки нелинейного элемента. Цепь, показанная на рис. 4.4, имеет параметры: $E = 2 \text{ В}$, $R = 25 \text{ Ом}$. ВАХ нелинейного элемента: $I(U) = 0.04 U^2$.

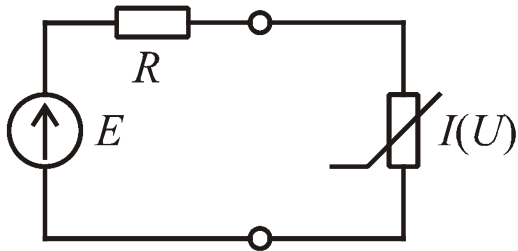


Рис. 4.4

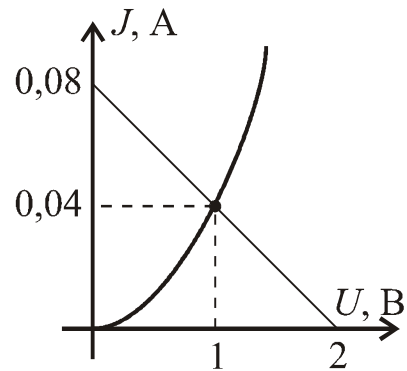


Рис. 4.5

Напряжение холостого хода линейного двухполюсника $U_{xx} = 2 \text{ В}$. Ток короткого замыкания $I_{кз} = \frac{E}{R} = 0.08 \text{ А}$. Нагрузочная характеристика цепи смещения – прямая, проходящая через точки с координатами (0, 0.08) и (2,0) на рис. 4.5. Рабочая точка находится на пересечении нагрузочной прямой и ВАХ нелинейного резистора. Ее координаты (1, 0.04).

1. Численное решение уравнений нелинейных резистивных цепей. Метод Ньютона - Рафсона

Наиболее распространенным методом решения уравнений, описывающих поведение нелинейных резистивных цепей, является метод Ньютона-Рафсона. Это итерационный метод решения нелинейных уравнений, записанных в виде

$$f(x) = 0. \quad (4.2)$$

Предположим, что x_k является приближенным значением корня уравнения (4.2). В окрестности x_{k+1} функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + hf'(x_k) + 0,5h^2 f''(x_k) + \dots \quad (4.3)$$

Символом ' в последней формуле обозначена операция дифференцирования. Отбросим в (4.3) нелинейные слагаемые. Полагая, что

уточненное значение корня $x_{k+1} = x_k + h$ является истинным, найдем значение поправки:

$$h = -f(x_k) / f'(x_k).$$

Решение уравнения (4.2) начинают с того, что определяют начальное приближение корня x_0 . Уточненное значение $x_{k+1}, k = 1, 2, \mathbf{K}$, определяется по формуле

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k). \quad (4.4)$$

Расчет повторяют до тех пор, пока поправка не станет меньше заданной постоянной ε :

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

Равенство (4.4) называют уравнением Ньютона-Рафсона.

Метод Ньютона - Рафсона имеет быструю сходимость в том случае, если начальное приближение выбрано достаточно близко от истинного решения. Однако если начальное приближение далеко от точного решения, итерации Ньютона - Рафсона могут не сходиться совсем. Подробно вопросы обеспечения сходимости и численной устойчивости при анализе нелинейных цепей рассмотрены в [10, 11].

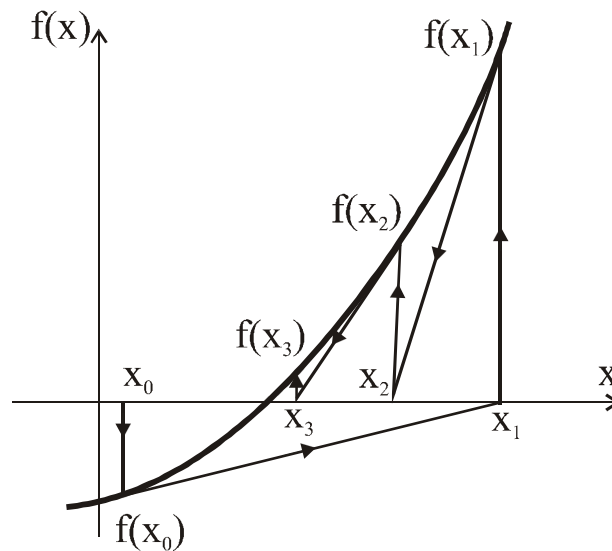


Рис. 4.6

Метод Ньютона - Рафсона имеет простую геометрическую интерпретацию. Обратимся к рис. 4.6, на котором изображен график функции $f(x)$. Отбрасыванию нелинейных слагаемых в формуле (4.3) соответствует замена функции $f(x)$ касательной в точке с координатами

$\{x_1, f(x_1)\}$. Проведя касательную до пересечения с осью x , найдем поправку h и уточненное значение корня x_2 (рис. 4.6).

Пример 4.1. Расчет нелинейной резистивной цепи методом Ньютона - Рафсона. Цепь, показанная на рис. 4.7, имеет следующие параметры: $J = 80 \text{ мА}$, $G = 0.04 \text{ Сим}$. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистора описывается выражением: $I(U) = 0.04U^2$. Необходимо определить рабочую точку нелинейного элемента.

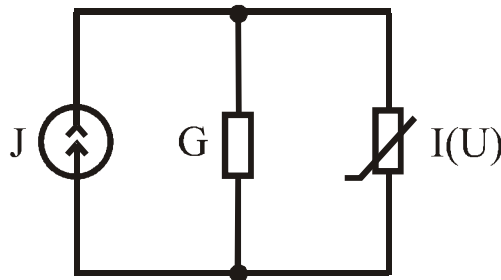


Рис. 4.7

Решение. В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$-J + GU + 0.04U^2 = 0.$$

Итак, нелинейное уравнение имеет вид:

$$f(U) = -0.08 + 0.04U + 0.04U^2 = 0.$$

Производная определяется уравнением:

$$f'(U) = 0.04 + 0.08U.$$

Выберем начальное приближение $U_0 = 0$. Уточненное решение на первом шаге:

$$U_1 = U_0 - \frac{f(U_0)}{f'(U_0)} = 0 + \frac{0.08}{0.04} = 2.$$

На втором шаге

$$U_2 = U_1 - \frac{f(U_1)}{f'(U_1)} = 2 - \frac{0.16}{0.2} = 1.2.$$

На третьем и четвертом шагах получим: $U_3 = 1.012$, $U_4 = 1$. Таким образом, напряжение нелинейного элемента $U = 1 \text{ В}$.

Метод Ньютона-Рафсона можно использовать и для решения систем нелинейных уравнений. Обозначим $[x^k]$ - вектор переменных на k -м шаге. В этом случае уравнение (4.3) примет вид:

$$[x^{(k+1)}] = [x^k] - [J(x^k)]^{-1} [f(x^k)]. \quad (4.5)$$

Здесь $[J(x)]$ - матрица Якоби, элементы которой равны частным производным df_i / dx_j .

Равенство (4.5) называют n -мерным аналогом уравнения Ньютона-Рафсона.

Обращение матрицы Якоби в формуле (4.4) требует значительного количества эпераций. С вычислительной точки зрения более эффективно решить систему линейных уравнений

$$[J(x^k)][x^{(k+1)}] = [J(x^k)][x^{(k)}] - [f(x^k)]. \quad (4.6)$$

Как и в одномерном случае, в n -мерном случае метод Ньютона - Рафсона обеспечивает быструю сходимость в тех случаях, когда начальное приближение выбрано достаточно близко к истинному решению. Однако объем вычислений при решении многомерной задачи резко возрастает, поскольку на каждом шаге требуется вычислять n^2 производных в матрице Якоби.

Рассмотрим основные этапы процедуры решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона.

1. Выбираем максимальное число итераций m и допустимую величину ошибки ε .
2. Выбираем начальное приближение $[x^{(0)}]$.
3. Решаем уравнение (4.6) и находим уточненное решение $[x^{(1)}]$.
4. Если $\|[x^{(k+1)}] - [x^{(k)}]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i^{k+1} - x_i^k)^2} < \varepsilon$, решение найдено. Если неравенство не выполняется, повторяем шаг 3, используя уточненное значение вектора переменных.
5. Если число итераций превысило m и решение не найдено, выбирается новое начальное приближение, и процедура решения повторяется.

2. Дискретные схемы замещения нелинейных резистивных цепей

При использовании метода Ньютона - Рафсона для решения системы нелинейных уравнений на каждой итерации необходимо вычислять частные производные $df_i(x^k)/dx_j$ для получения матрицы Якоби $[J(x^k)]$, что приводит к большим затратам машинного времени. Эту трудность можно преодолеть, если на каждой итерации нелинейные резисторы представлять эквивалентными линеаризованными схемами.

Рассмотрим нелинейную цепь, изображенную на рис. 4.8, а. Вольт - амперная характеристика нелинейного резистора показана на рис. 4.8, в.

Поскольку зажимы нелинейного элемента замкнуты накоротко, уравнение нелинейной цепи:

$$U(I) = 0. \quad (4.7)$$

Обозначим начальное приближение $I^{(0)}$. В соответствии с формулой Ньютона – Рафсона

$$I^{(j+1)} = I^{(j)} - (R^{(j)})^{-1} U(I^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Здесь

$$R^{(j)} = \left. \frac{dU(I)}{dI} \right|_{I=I^{(j)}}.$$

Уравнению (4.5) соответствует замена ВАХ нелинейного элемента касательной в точке с координатами $(I^{(j)}, U^{(j)})$. Уравнение касательной:

$$U(I) = R^{(j)} I^{(j)} - E^{(j)} = 0. \quad (4.9)$$

Величина $E^{(j)}$ равна отрезку, отсекаемому касательной на оси напряжений. Уравнению (4.9) соответствует линейная схема, изображенная на рис. 4.8, б.

Найдем решение уравнения (4.7), используя метод Ньютона-Рафсона:

$$I^{(j+1)} = I^{(j)} - [R^{(j)}]^{-1} U(I^{(j)}). \quad (4.10)$$

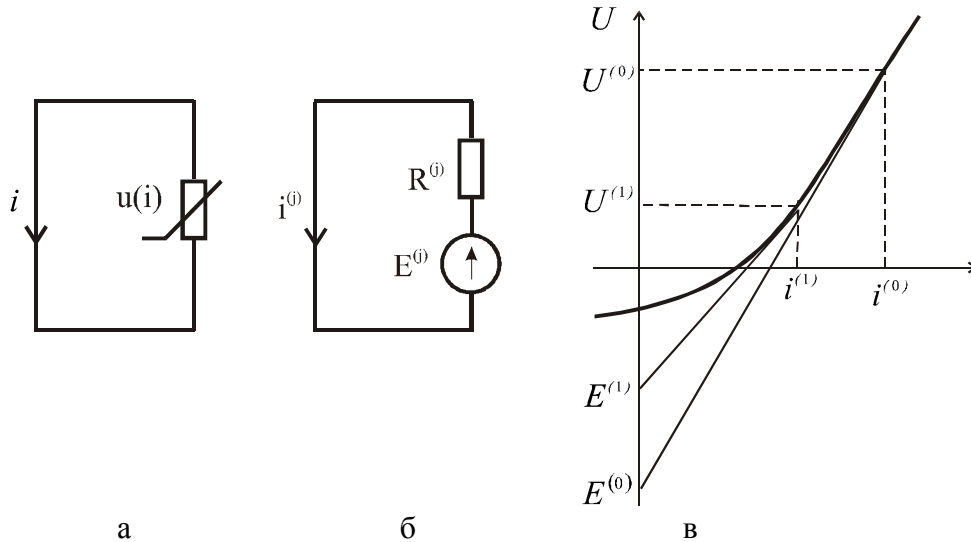


Рис. 4.8

При $I = I^{(j)}$ выполняется равенство $U(I) = U(I^{(j)})$. Следовательно, если ток принимает значение $I = I^{(j)}$, уравнения (4.9) и (4.10) имеют одинаковые решения. Поэтому на j -й итерации нелинейное уравнение (4.10) можно заменить линейным соотношением (4.9) и получить такое же решение $I^{(j+1)}$. Иными словами, на j -й итерации нелинейный элемент заменяется линейной эквивалентной схемой, изображенной на рис. 4.8, б. Подчеркнем, что линейная схема эквивалентна нелинейному элементу только на j -й итерации. На каждой следующей итерации параметры $R^{(j)}$ и $E^{(j)}$ рассчитываются заново в соответствии с новым значением тока $I^{(j+1)}$.

Если цепь содержит несколько нелинейных элементов, каждый из них можно заменить линейной эквивалентной схемой. Таким образом, решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона - Рафсона эквивалентно анализу последовательности линейных схем замещения. На всех итерациях структура линейной цепи остается неизменной, а ее параметры меняются дискретно. Поэтому такие эквивалентные схемы получили название *дискретных линейных схем замещения*.

Достоинство дискретных линейных схем замещения заключается в том, что процедура определения рабочей точки сводится к анализу линейных резистивных схем.

Пример 4.2. Построить линейную схему замещения полупроводникового диода, ВАХ которого описывается выражением:

$$I_D = I_0 (e^{U_D/V_t} - 1).$$

Здесь I_0 – обратный ток насыщения диода; V_t – температурная постоянная.

Решение. Вольт-амперная характеристика диода показана на рис. 4.9. На рис. 4.10 показана линейная схема замещения. Параметры линейной схемы

$$G_{\vartheta} = \frac{dI_{D0}}{dU} = \frac{I_0}{Vt} e^{U_{D0}/Vt} .$$

$$J_{\vartheta} = I_{D0} - G_{\vartheta} U_{D0} .$$

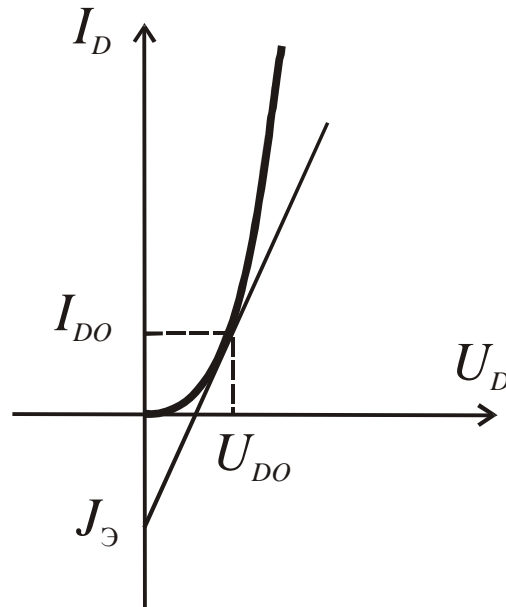


Рис. 4.9

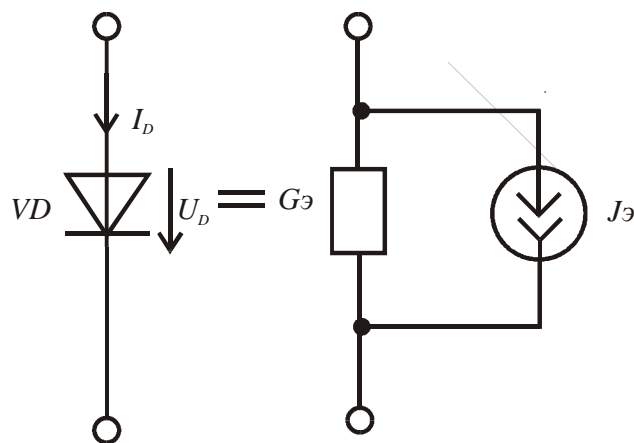


Рис. 4.10

При комнатной температуре ($25^{\circ}C$) $Vt \approx 25.8$ мВ. Обратный ток насыщения маломощного диода $I_0 = 10^{-15}$ А. Если напряжение диода

$U_{D0} = 0.7$ В, ток $I_{D0} = I_0 (e^{U_{D0}/V_t} - 1) = 1$ мА, то параметры дискретной линейной схемы замещения диода

$$G_s = \frac{I_0}{V_t} e^{U_{D0}/V_t} =$$

$$J_s = I_{D0} - G_s U_{D0} =$$

5. Выводы

1. Одна из важнейших задач анализа нелинейных цепей заключается в определении рабочих точек или точек смещения электронных приборов.
2. Рабочей точкой нелинейного элемента называют значения постоянных напряжения и тока, изображаемых в виде точки на его вольт-амперной характеристике.
3. Для определения рабочих точек нелинейных элементов используют графические и численные методы.
4. Графический метод определения рабочей точки является приближенным. Его достоинствами являются простота и наглядность. Графический метод можно использовать для определения начального приближения, а затем для получения точного решения применить численный метод.
5. Для анализа сложных нелинейных цепей используют численные методы. Наиболее распространенным методом решения уравнений, описывающих поведение нелинейных резистивных цепей, является метод Ньютона-Рафсона.
6. В программах схемотехнического моделирования используют схемную интерпретацию метода Ньютона-Рафсона – метод линеаризованных схем замещения.