Лекция 2

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

План

1. Введение
2. Метод узловых напряжений
3. Узловые уравнения для цепей с управляемыми источниками
4. Алгоритм формирования узловых уравнений
5. Модифицированный метод узловых напряжений
6. Примеры составления модифицированных узловых уравнений
7. Выводы

1. Введение

Уравнения электрической цепи составляются на основе законов Кирхгофа. В ходе предыдущей лекции было показано, что система уравнений на основе законов Кирхгофа может быть записана в матричном виде с помощью топологических матриц. Общее число уравнений, составляемых по законам Кирхгофа, равно числу ветвей. Однако для цепей большого размера число уравнений оказывается слишком велико.

Задачу анализа разветвленных цепей можно значительно упростить, если воспользоваться специальными методами, предназначенными для расчета сложных цепей. Одним из таких методов является *метод узловых напряжений*, который мы рассмотрим в следующем разделе.

2. Метод узловых напряжений

В методе узловых напряжений независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного (опорного) узла. Эти величины называют *узловыми напряжениями*. Положительные направления узловых напряжений указываются стрелками от рассматриваемых узлов к базисному. В качестве последнего удобно выбирать заземленный узел или узел, в котором сходится наибольшее число ветвей. Уравнения составляют только на основе первого закона Кирхгофа. Поэтому анализируемая цепь может содержать только источники тока. Если в схеме имеются источники напряжения, они должны быть заменены эквивалентными источниками тока.

Матричная форма узловых уравнений. Узловые уравнения удобно записывать в матричной форме. В общем виде для цепи, имеющей $n+1$ узел, эти уравнения имеют вид:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix}.$$

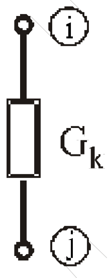
В более компактном виде

$$[G][V] = [J].$$

Здесь – $[V]$ вектор узловых напряжений. Квадратную матрицу коэффициентов $[G]$ называют *матрицей узловых проводимостей*, а вектор правой части – *вектором узловых токов*.

Элементы на главной диагонали матрицы узловых проводимостей называют *собственными проводимостями узлов*. Собственная проводимость i–го узла g_{ii} равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле. Элементы матрицы $[G]$, расположенные вне главной диагонали, называют *взаимными проводимостями*. Взаимная проводимость между узлами i и j g_{ij} равна проводимости ветви, соединяющей эти узлы, взятой со знаком “ – “. В пассивной цепи, которая не содержит управляемых источников и идеальных ОУ, $g_{ij} = g_{ji}$, и матрица узловых проводимостей симметрична относительно главной диагонали.

Таким образом, если k-я ветвь включена между узлами i и j (рис. 2.1а), ее проводимость G_k войдет в элементы матрицы узловых проводимостей, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами i и j (рис. 2.1б).

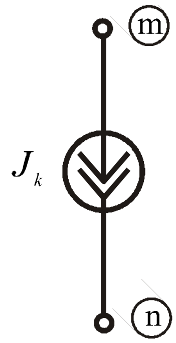


$$\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & G_k & \cdots & -G_k & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & -G_k & \cdots & G_k & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \end{array} \right] \end{array}$$

а *б*

Рис. 2.1

Элементы вектора узловых токов равны алгебраической сумме токов источников, сходящихся в соответствующем узле. Если независимый источник тока J_k включен между узлами m и n (рис. 2.2а), ток этого источника необходимо учесть в векторе узловых токов так, как показано на рис. 2.2б.



$$\begin{array}{c} \\ m \\ \\ n \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \cdots \\ -J_k \\ \cdots \\ J_k \\ \cdots \end{bmatrix}$$

а *б*

Рис. 2.2

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей и вектора узловых токов не зависят от выбора направлений токов ветвей или нумерации узлов. Они позволяют сформировать узловые уравнения непосредственно по схеме, без предварительной записи уравнений по первому закону Кирхгофа.

Пример 2.1. Записать узловые уравнения для цепи, показанной на рис. 2.3.

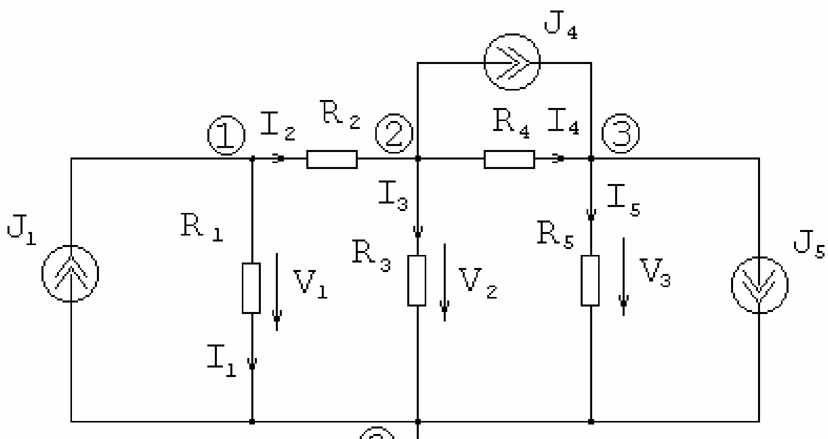


Рис. 2.3

Для рассмотренного примера узловые уравнения в матричной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1 \\ -J_4 \\ J_4-J_5 \end{bmatrix}.$$

3. Узловые уравнения для цепей с источниками тока, управляемыми током (ИТУН)

Если ИТУН включен между узлами $i,\ j, k, l$ так, как показано на рис. 2.4, его параметр S войдет в матрицу узловых проводимостей следующим образом:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \phantom{\mathbf{L}} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ l \\ \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} & \mathbf{L} & & \mathbf{L} & \\ \mathbf{L} & & \mathbf{L} & & \mathbf{L} \\ & \mathbf{L} & S & \mathbf{L} & S \\ \mathbf{L} & & \mathbf{L} & & \mathbf{L} \\ & \mathbf{L} & -S & \mathbf{L} & S \end{bmatrix} \end{array}$$

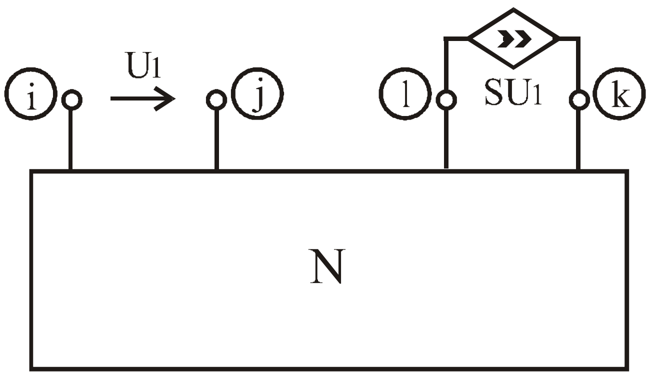


Рис. 2.4

В соответствии с правилом, которое мы сформулировали, узловые уравнения цепи с ИТУН (рис. 2.5) имеют вид:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2+S & G_2+G_3+G_4-S & -G_4 \\ -S & -G_4+S & G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ -J_5 \end{bmatrix}.$$

Параметр управляемого источника входит в элементы матрицы узловых проводимостей, которые находятся на пересечении строк 2, 3 и столбцов 1, 2.

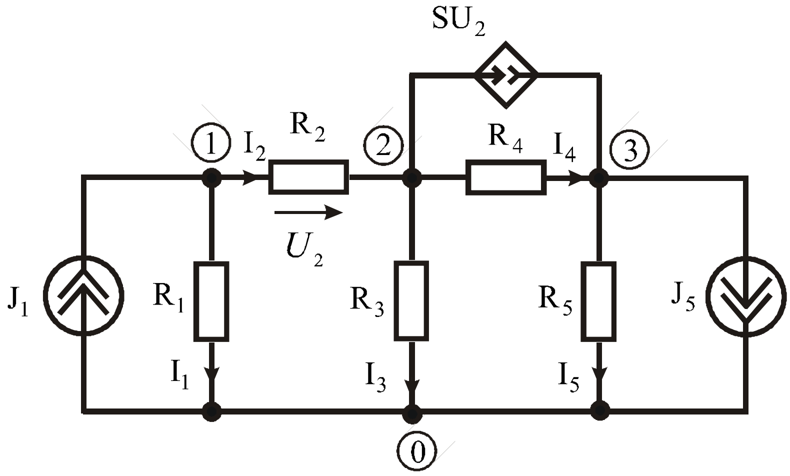


Рис. 2.5

Заметим, что матрица узловых проводимостей цепи, содержащей управляемые источники, не будет симметричной.

4. Алгоритм формирования узловых уравнений

Рассмотренные свойства матрицы узловых проводимостей используются в алгоритме формирования узловых уравнений, основанном на последовательном переборе ветвей.

Алгоритм формирования узловых уравнений включает следующие шаги.

1. Выбираем базисный узел.
2. Остальным узлам присваиваем номера $1, 2, \mathbf{K}, n_у - 1$.
3. Представляем матрицу узловых проводимостей в виде таблицы, имеющей $(n_у - 1)$ строк и $(n_у - 1)$ столбцов.
4. Полагаем все элементы матрицы узловых проводимостей и векторы узловых токов равными нулю. Это эквивалентно исключению из схемы всех элементов.
5. Поочередно включаем элементы в схему. Если резистор включен между узлами i и j, его проводимость записываем в элементы матрицы, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами i и j (рис. 2.2). Если резистор включен между узлом i и базисным, его проводимость записываем в собственную проводимость i-го узла g_{ii}. Если между узлами i и j включен источник тока, его ток записываем в i-ю и j-ю строки вектора узловых токов (рис. 2.3).

6. Формирование узловых уравнений заканчивается, когда в схему включены все элементы.

Метод узловых напряжений широко используется в программах машинного анализа электронных схем. Это объясняется простотой алгоритма формирования узловых уравнений и хорошей численной обусловленностью матрицы узловых проводимостей.

5. Модифицированный метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений применим для цепей, которые содержат только резистивные элементы с ненулевым сопротивлением, независимые источники тока и источники тока, управляемые напряжением (ИТУН). Если в схеме имеются другие виды элементов, например независимые источники напряжения или управляемые источники (кроме ИТУН), они должны быть преобразованы в эквивалентные источники тока. Такие элементы называют *нерегулярными*. Кроме того, с помощью метода узловых напряжений мы не можем в явном виде рассчитать токи ветвей.

Этих недостатков лишен *модифицированный*, или расширенный, метод узловых напряжений. Суть этого метода заключается в следующем.

1. Независимыми переменными являются узловые напряжения, а также токи нерегулярных элементов.
2. Система уравнений включает уравнения на основе первого закона Кирхгофа и компонентные уравнения нерегулярных элементов.

Расширенные узловые уравнения имеют форму:

$$\begin{bmatrix} [Y] & [M] \\ [N] & [Z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J] \\ [E] \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Матрица коэффициентов в системе уравнений (2.1) разбита на четыре субматрицы. Субматрица $[Y]$ размера $(n_y - 1)\cdot(n_y - 1)$ является матрицей узловых проводимостей регулярной части цепи. Субматрица $[M]$ содержит коэффициенты компонентных уравнений, а $[N]$ учитывает токи нерегулярных элементов в уравнениях по первому закону Кирхгофа.

Каждому нерегулярному элементу в расширенной системе уравнений соответствуют дополнительные строка и столбец. Для каждого вида элементов они имеют определенную форму. В строке записывают коэффициенты компонентного уравнения, а в столбце – коэффициенты уравнений по первому закону Кирхгофа, учитывающих ток нерегулярного элемента. Для каждого такого элемента дополнительные строка и столбец имеют определенную структуру, которые удобно изображать в виде трафаретов или «штампов». «Штампы» основных элементов приведены в табл. 2.1.

Как правило, число расширенных узловых уравнений значительно превышает число уравнений, составляемых в соответствии с «классическим» методом узловых напряжений. Однако матрица коэффициентов расширенной системы уравнений содержит большое число нулевых элементов. Матрицы, в которых большинство элементов нулевые, называют *разреженными*. Для работы с такими матрицами используют специальные алгоритмы, которые позволяют не производить операций с нулевыми элементами и не хранить их. Это позволяет значительно сократить машинное время, необходимое для решения системы уравнений, и память для хранения матрицы коэффициентов. Таким образом, для машинного анализа удобен метод, минимизирующий не число уравнений, а число ненулевых элементов в матрице коэффициентов.

Сравнение различных методов анализа электронных схем показывает, что в большинстве случаев матрица коэффициентов модифицированной системы узловых уравнений является наиболее разреженной. Поэтому модифицированный метод узловых напряжений находит широкое применение в программах машинного анализа электронных схем.

4. Примеры составления модифицированных узловых уравнений

Пример 2.2. Запишем модифицированные узловые уравнения для цепи, показанной на рис. 2.7.

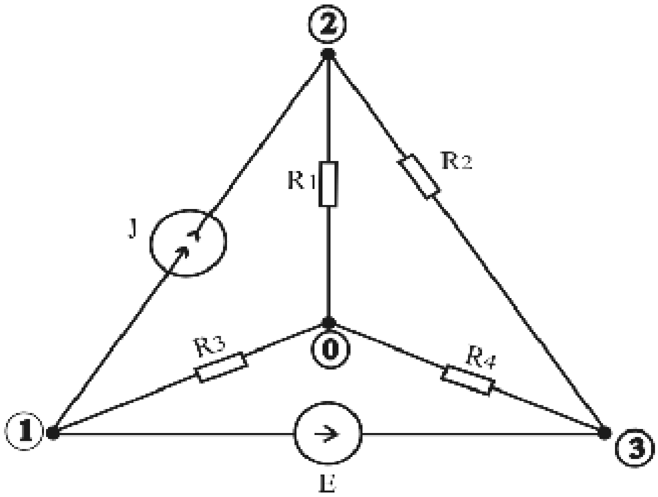
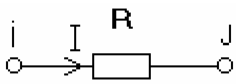
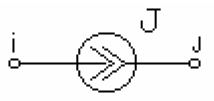
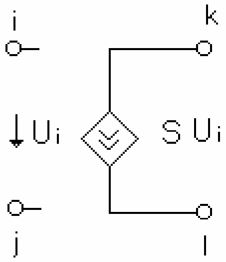
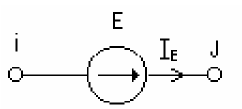
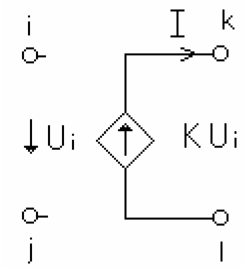
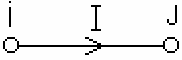


Рис. 2.7

Таблица 2.1

Элемент	Компонентное уравнение	“Штамп”
Резистор 	——	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник тока 	——	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} Vi \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix}$
 ИТУН	——	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ l \end{array} & \begin{bmatrix} S & -S \\ -S & S \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник напряжения 	$V_j - V_i = E$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & -1 \\ -1 & 1 & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ \mathrm{I}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$
ИНУН 	$k(V_i - V_j) -$ $V_k - V_l = 0$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} i & l & k & l \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ l \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & & 1 \\ & & & \\ k & -k & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$
Короткозамкнутая ветвь 	$V_i - V_J = 0$	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & -1 \\ -1 & 1 & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Расширенные узловые уравнения для схемы на рис. 2.7 имеют вид:

$$\begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ +J \\ 0 \\ E \end{bmatrix}.$$

В последней строке записано компонентное уравнение источника напряжения: $-V_1+V_3=E$. Элементы последнего столбца матрицы коэффициентов учитывают ток нерегулярного элемента (I_E) в уравнениях для первого и третьего столбцов**.**

Рассмотрим примеры формирования расширенных узловых уравнений.

Пример 2.3. Составить расширенные узловые уравнения для схемы с идеальным операционным усилителем (рис. 2.8).

Компонентные уравнения нерегулярных элементов.

Источник напряжения: $V_1=E$;

Операционный усилитель: $V_1-V_2=0$.

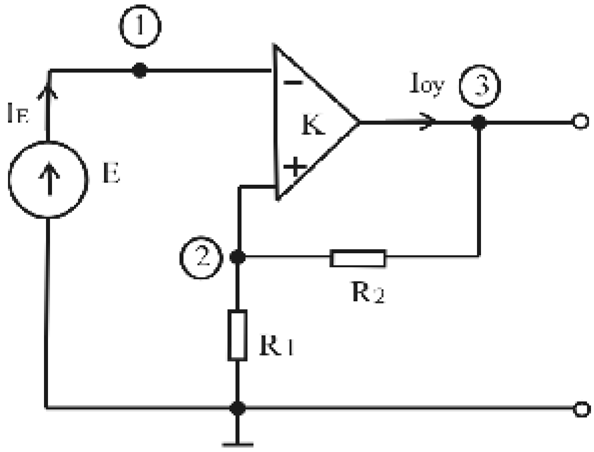


Рис. 2.8

Расширенные узловые уравнения для схемы на рис. 2.8 имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \\ I_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Каждому нерегулярному элементу в матрице коэффициентов соответствуют дополнительные строка и столбец. Решение расширенной системы узловых уравнений позволит определить напряжения узлов, а также ток источника и выходной ток ОУ.

Рассмотренные примеры показывают, что матрицы коэффициентов расширенных узловых уравнений являются весьма разреженными.

6. Выводы

1. Метод узловых напряжений – метод расчета электрических цепей, в котором независимыми переменными являются напряжения узлов цепи относительно выбранного базисного узла. Уравнения составляют на основе первого закона Кирхгофа.

2. Узловые уравнения, записанные в матричной форме, имеют вид

$$[G][V]=[J].$$

Здесь $[V]$ – вектор узловых напряжений. Квадратную матрицу коэффициентов $[G]$ называют матрицей узловых проводимостей, а вектор правой части $[J]$ – вектором узловых токов.

3. Элементы на главной диагонали матрицы узловых проводимостей называют *собственными проводимостями* узлов. Собственная проводимость i-го узла g_{ii} равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле. Элементы матрицы $[G]$, расположенные вне главной диагонали, называют *взаимными проводимостями*. Взаимная проводимость между узлами i и j g_{ij} равна проводимости ветви, соединяющей эти узлы, взятой со знаком минус.

4. Метод узловых напряжений широко используется в программах компьютерного моделирования электрических цепей. Это объясняется простотой алгоритма формирования узловых уравнений и хорошей численной обусловленностью матрицы узловых проводимостей.