Лекция 3

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

План

1. Введение
2. Решение систем линейных уравнений методом исключения Гаусса
3. Метод LU- разложения
4. Анализ линейных цепей в установившемся синусоидальном режиме
5. Выводы

1. Введение

В ходе предыдущих лекций мы рассмотрели алгоритмы формирования уравнений электрических цепей. Теперь обсудим способы решения этих уравнений. Поведение нелинейной динамической цепи описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Однако сейчас мы ограничимся рассмотрением методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Это объясняется тем, что, как мы увидим позднее, анализ нелинейных динамических цепей сводится к многократному расчету эквивалентных резистивных схем. Поэтому решающее значение приобретает эффективная организация анализа линейных резистивных цепей. По существу модуль анализа линейных цепей является ядром любой современной программы моделирования как линейных, так и нелинейных цепей.

Примеры, которые мы рассмотрели в ходе предыдущей лекции, показывают, что матрицы коэффициентов системы узловых уравнений линейной цепи являются разреженными, т.е. большая часть коэффициентов равна нулю. Современные программы анализа электрических цепей используют специальные методы хранения и решения систем линейных уравнений с разреженными матрицами.

2. Метод исключения Гаусса

Решение систем линейных уравнений производится либо прямыми, либо итерационными методами. В программах компьютерного моделирования электрических цепей используются прямые методы решения системы линейных уравнений. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только таких методов.

Пусть имеется система линейных уравнений

$$[A][X]=[B] \tag{3.1}$$

где $[A]$ – матрица размера (n x n) с постоянными коэффициентами; $[B]$ – n-мерный вектор известных констант и $[X]$ – n-мерный вектор неизвестных:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Эту систему уравнений можно решить путем обращения матрицы $[A]$:

$$[x]=[A]^{-1}[b]. \tag{3.3}$$

Однако обращение матрицы $[A]$ требует значительно большего машинного времени, чем прямое решение уравнения (3.1). Поэтому с вычислительной точки зрения более эффективно решить систему линейных уравнений, чем обращать матрицу коэффициентов.

Наиболее эффективным методом решения систем линейных уравнений является алгоритм исключения Гаусса. Он основывается на последовательном исключении переменных до тех пор, пока не останется единственное уравнение с одной переменной, например, x_n. Это уравнение решается относительно x_n. Затем найденное значение x_n подставляется в предыдущие уравнения для определения переменных x_{n-1}, x_{n-2}, $\ldots$, x_1.

Рассмотрим матричное уравнение (3.2) и перепишем его в координатной форме, обозначив элементы b_i вектора b через, $a_{i,n+1}$. Это упростит дальнейшие обозначения. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{aligned}$$

Алгоритм исключений Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе выполняется прямое исключение, а на втором – обратная подстановка. Рассмотрим подробнее эти этапы.

Этап 1: Исключение. Оно выполняется за $n-1$ шаг.

Разделим первое уравнение на a_{11} и запишем его в следующем виде:

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \mathbf{K} = a_{1,n+1}^{(1)}.$$

Здесь $a_{12}^{(1)} = a_{12} / a_{11}$. Умножим это уравнение на $-a_{21}$ и сложим его с вторым уравнением. Коэффициенты вновь полученного второго уравнения

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - a_{21} a_{1j}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \mathbf{K}, n+1.$$

Такой выбор множителя обеспечивает равенство нулю коэффициента $a_{21}^{(1)}$. Аналогично для других уравнений подстановка

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad \begin{array}{l} i = 2, 3, \mathbf{K}, n, \\ j = 1, 2, \mathbf{K}, n+1, \end{array}$$

обеспечивает равенство нулю всех коэффициентов в первом столбце матрицы *A*, за исключением $a_{11}^{(1)}$, который равен 1. Разумеется, не нужно вычислять элемент который становится нулевым. Элементы a_{i1} теперь не занимают память ЭВМ, и вычисления выполняются, начинал с $j = 2$. В результате этих операций уравнения примут вид

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \mathbf{K} + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)}$$

$$a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \mathbf{K} + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}$$

……………………………………………

$$a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \mathbf{K} + a_{nn}^{(1)} x_n = a_{n,n+1}^{(1)}.$$

Индекс в скобках показывает, что коэффициенты были один раз изменены.

На следующем шаге исключим из рассмотрения первые строку и столбец и применим аналогичную процедуру к уравнениям от второго до n-го. Запишем формулы для вычисления новых значений коэффициентов:

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} a_{22}^{(1)}; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}; \quad i = 3, 4, \ldots, n; \; j = 3, 4, \ldots, n+1.$$

Повторим процедуру для всех строк матрицы $[A]$. Если обозначить $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, то общую формулу метода исключения Гаусса можно представить следующим образом:

$$a_{kj}^{(k)} = a_{k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \, a_{kj}^{(k)}; \, k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = k+1, \ldots, n;$$

$$j = k+1, \ldots, n+1.$$

В результате система уравнений приводится к виду

$$\begin{aligned}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= a_{1,n+1}^{(1)} \\
x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n &= a_{2,n+1}^{(2)} \\
x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)} x_n &= a_{3,n+1}^{(3)} \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n,n+}^{(n)} x_2.
\end{aligned}$$

Этап 2: Обратная подстановка. Она необходима для определения вектора неизвестных. Последняя составляющая x_n используется в $(n-1)$-м уравнении для определения x_{n-1} и т. д. В общем виде обратную подстановку можно записать так:

$$x_i = a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}, \quad i = n-1, \quad n-2, \ldots, 1.$$

Здесь верхние индексы опущены.

Эффективность алгоритма принято оценивать числом арифметических операций. В алгоритме Гаусса каждая операция представляет собой комбинацию умножения и вычитания. Можно показать, что исключение по Гауссу требует выполнения $\sim n^3/3$ операций, где n - порядок матрицы, а обратная подстановка может быть выполнена приблизительно за $n^2/2$ операций.

3. Метод LU- разложения

Алгоритм исключений Гаусса позволяет свести любую неособенную матрицу $[A]$ к верхней треугольной матрице с единичными диагональными элементами. Лучшим методом решения системы линейных алгебраических уравнений является метод *разложения на треугольные матрицы,* или метод *UL-факторизации.* Алгоритмы этого метода близки к методу исключения Гаусса, хотя вычисления могут проводиться в различной последовательности. Главным преимуществом метода UL-факторизации в сравнении с методом исключения Гаусса является возможность более простого получения решений для различных векторов b в правой части системы (2.4,1), а также для *транспонированной системы* уравнений, что требуется при расчете чувствительностей.

Допустим, что матрицу системы уравнений (3.1) можно разложить на два сомножителя:
где

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \ldots u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \ldots u_{2n} \\ & & 1 & \ldots u_{3n} \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь матрица L является *нижней треугольной*, а матрица U - *верхней треугольной*. Заметим, что на главной диагонали матрицы U стоят единицы. Это означает, что определитель матрицы A ранен произведению диагональных элементов l_{ii} матрицы L.

Представим матрицу коэффициентов в виде произведения верхней и нижней треугольных матриц:

$$LU\,x = b\,.$$

Определим вспомогательный вектор z как

$$U\,x = z\,.$$

Из этого уравнения вектор z найти невозможно, поскольку неизвестен вектор x. Однако, подставив z в (2.5.4), получим

$$L\,z = b\,.$$

Благодаря специальной форме матрицы L вектор z можно легко определить, Для этого запишем (2.5.6) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}
&l_{11}z_1 &&= b_1\\
&l_{21}z_1 + l_{22}z_2 &&= b_2\\
&l_{31}z_1 + l_{32}z_2 + l_{33}z_3 &&= b_3\\
& &&\vdots\\
&l_{n1}z_1 + l_{n2}z_2 + \ldots + l_{nn}z_n &&= b_n
\end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
&z_1 = b_1 / l_{11}\\
&z_2 = (b_2 - l_{21}z_1) / l_{22}\\
&z_3 = (b_3 - l_{31}z_1 - l_{32}z_2) / l_{33}.
\end{aligned}$$

или в общем виде

$$z_1 = b_1 / l_{11},$$

$$z_1 = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \right) \Big/ l_{ii}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Этот процесс называют *прямым исключением* (прямой подстановкой или прямым ходом). Чтобы уравнение (2.5.7) имело смысл, диагональные элементы матрицы L должны быть ненулевыми. Теперь вернемся к (2.5.5) и найдем вектор неизвестных x. Для этого запишем (2.5.5) в координатной форме

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1n}x_n &= z_1 \\ x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2n}x_n &= z_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + \quad u_{n-1,n}x_n &= z_{n-1} \\ x_n &= z_n. \end{aligned}$$

Начиная с последнего уравнения, можно последовательно найти компоненты вектора x. В общем виде они определяются по формуле

$$x_n = z_n,$$

$$x_1 = z_1 - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j. \quad i = n-1, \quad n-2, \ldots, 1.$$

Этот процесс называют *обратной подстановкой* или обратным ходом. Число операций, требуемых для выполнения как прямой, так и обратной подстановок, равно примерно $n^2/2$, а в сумме для решения требуется n^2 операций. Изучение уравнений (2.5.7) показывает, что компонента b_i используются только для определения величин z_i и позднее не требуются. Аналогично в (2.5.8) величина z_i не нужна после вычисления переменных x_i. Следовательно, при такой системе расчетов векторы b, z и x могут быть размещены в одних и тех же ячейках памяти ЭВМ. Обратите также внимание на эквивалентность обратной подстановки в уравнениях (2.5.8) и (3.38). Займемся выводом алгоритма LU-разложения. С этой целью рассмотрим матрицу раз мера 4×4. Предполагая, что разложение существует, запишем произведение верхней и нижней треугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & l_{11}u_{14} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} & l_{21}u_{14}+l_{22}u_{24} \\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+l_{33}u_{34} \\ l_{41} & l_{41}u_{12}+l_{42} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+l_{44} \end{bmatrix}.$$

Сравним это произведение с матрицей $[A]$. Видно, что первый столбец разложения остается неизменным и $l_{i1}=a_{i1}, i=1, 2, 3, 4$. Заметим также, что первая строка произведения может быть использована для определения элементов первой строки матрицы $[U]$ из решения уравнений $l_{11}u_{1j}=a_{1j}$, $j=2, 3, 4$. Поскольку во втором столбце элементы u_{12} и l_{i1} известны $l_{i2}=a_{i2}-l_{i1}u_{12}, i=2, 3, 4$. Так как теперь известны l_{21}, l_{22} и u_{1j} можно использовать вторую строку матриц для расчета u_{2j}, $j=3, 4$:

$$u_{2j}=a_{2j}-l_{21}u_{1j})/l_{22}, \quad j=3, 4.$$

Далее, чередуя строки и столбцы, можно аналогичным образом найти остальные элементы матриц $[L]$ и $[U]$.

Чтобы получить общие соотношения, запишем произвольный элемент произведения матриц $[L]$ и $[U]$:

$$a_{ij}=\sum_{m=1}^{n} l_{im}u_{mj}=\sum_{m=1}^{\min(i,j)} l_{im}u_{mj}.$$

где верхний предел суммы учитывает наличие нулевых элементов в матрицах.
Рассмотрим произвольный элемент на или под главной диагональю матрицы $[A]$, для которого $i \ge j$, и заменим индекс j на индекс k. При этом, положив $u_{kk}=1$, получим

$$a_{ik}=\sum_{m=1}^{k} l_{im}u_{mk}=l_{ik}+\sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}, \quad .$$

или

$$l_{ik}=a_{ik}-\sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}, \quad i \ge k.$$

Аналогичным образом, рассматривая произвольный элемент над главной диагональю, для которого $i < j$, и используя индекс k в место I, находим

$$a_{kj} = \sum_{m=1}^{k} l_{km}u_{mj} = l_{kk}u_{kj} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj} \quad .$$

После преобразований придем к следующему выражению для элементов матрицы $[U]$:

$$u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj} \right) \Big/ l_{kk} \quad , \quad j > k.$$

Уравнения (2.5.9) и (2.5.10) описывают алгоритм разложения на треугольные матрицы, называемый *алгоритмом Краута*. Его выполнение осуществляется при задании k = 1, 2, …, n использовании формул (2.5.9) и (2.5.10).
Заметим, что требуемые в этих соотношениях значения элементов матриц $[L]$ и $[U]$ рассчитываются на предыдущих этапах процесса. Далее, каждый элемент a_{ij} матрицы $[A]$ требуется для вычисления только соответствующих элементов матриц L и U. Так как нулевые элементы матриц $[L]$ и $[U]$, а также единичную диагональ матрицы $[U]$ запоминать не нужно, в процессе вычислений матрицы $[L]$ и $[U]$ могут быть записаны на. месте матрицы A, причем $[L]$ расположена в нижнем треугольнике $(i \geq j)$, а U – соответственно в верхнем треугольнике $(i < j)$ матрицы $[A]$. Обобщив все вышесказанное, опишем алгоритм LU-разложения следующим образом:

Шаг 1. Положим $k = 1$ и перейдем к шагу 3.

Шаг 2. Используя (2.5.9), рассчитываем k-й столбец матрицы L. Если $k = n$, закончим процедуру разложения.

Шаг 3. Используя (2.5.10), рассчитываем k-ю строку матрицы U.

Шаг 4. Положим $k = k + 1$ и перейдем к шагу *2*.

4. Анализ линейных цепей в установившемся синусоидальном режиме

Анализ линейных цепей при действии синусоидальных источников имеет много общего с анализом линейных резистивных цепей. В рассматриваемом режиме определяются частотные характеристики электронных схем.

При анализе частотных характеристик расчет проводится в комплексной форме. Коэффициенты матрицы узловых проводимостей и элементы вектора решений являются комплексными. Комплексные проводимости индуктивных и емкостных элементов определяются по формулам:

$$\underline{Y}_L = 1/jwL;$$

$$\underline{Y}_C = jwC.$$

Поскольку $\underline{Y}_L$ и $\underline{Y}_C$ являются функциями частоты, анализ выполняется отдельно для каждой точки частотной оси. Таким образом, при частотном анализе на каждом шаге необходимо решать систему уравнений с комплексными коэффициентами. Для этого используются методы решения систем линейных алгебраических уравнений, рассмотренные выше.

5. Выводы

1. Ядром современных программ моделирования электронных цепей является модуль анализа линейных цепей.
2. Наиболее эффективным методом решения систем линейных уравнений является алгоритм исключения Гаусса.
3. Алгоритм исключений Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе выполняется прямое исключение, а на втором – обратная подстановка.